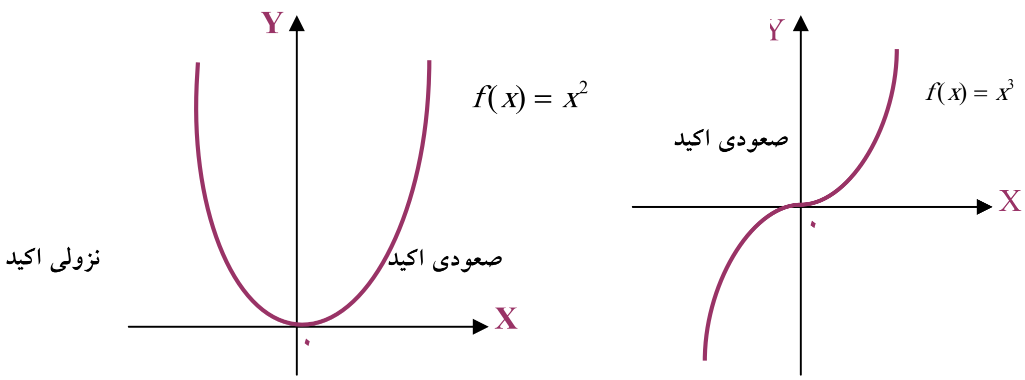
# ۲. ۷ پیوستگی تابع معکوس

**تعریف:** فرض کنیم تابع $f$ بر فاصله $I$ تعریف شده باشد . $f$ را بر $I$ **صعودی اکید** می نامند ،در صورتی که برای هر $x_1, x_2 \in I$ ، اگر $x_1 < x_2$ آنگاه $f(x_1) < f(x_2)$ . به طریق مشابه ، $f$ را بر $I$ **نزولی اکید** می نامند ، در صورتی که برای هر $x_1, x_2 \in I$ اگر $x_1 < x_2$ آنگاه $f(x_1) > f(x_2)$ . تابعی را که بر $I$ صعودی اکید یا نزولی اکید باشد **تابع یکنوای اکید** می نامند.

به عنوان مثال، اگر $f(x) = x^3$ ، آنگاه بر $R$ صعودی اکید است ، زیرا اگر $x_1 < x_2$ ، آنگاه $x_1^3 < x_2^3$ . تابع $g$ با ضابطه $g(x) = x^2$ بر $(-\infty,0)$ نزولی اکید و بر $(0,+\infty)$ صعودی اکید است . گراف های این دو تابع در زیر نشان داده شده است .




شکل ۲ . ۲۲

**تبصره:** توجه کنید که تابع های یکنوای اکید، یک به یک هستند ، زیرا فرض کنیم $f$ تابعی صعودی اکید و $x_1, x_2$ دو نقطه از قلمرو $f$ باشند. نشان می دهیم که $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ . اگر $x_1 \neq x_2$ ، آنگاه با توجه به صعودی اکید بودن $f$ داریم $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ و $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ که در هر حال متناقض با $f(x_1) = f(x_2)$ است. در نتیجه $x_1 = x_2$ و لذا $f$ تابعی یک به یک است. استدلال مشابهی به کار می رود وقتی تابع $f$ نزولی اکید باشد. دو قضیه زیر اطلاعات مفیدی در مورد توابع یکنوای پیوسته به دست می دهند.

**قضیه۱۵(الف):** فرض کنیم تابع $f$ بر بازه بسته $[a,b]$ صعودی اکید و پیوسته باشد . در این صورت :

$f$(i) دارای تابع معکوس $f^{-1}$ است، که بر بازه $[f(a), f(b)]$ تعریف شده است ،

(ii) $f^{-1}$ بر $\left[f(a),\, f(b)\right]$ صعودی اکید است ،
(iii) $f^{-1}$ بر $\left[f(a),\, f(b)\right]$ پیوسته است.

**قضیه ۱۵(ب):** فرض کنیم تابع $f$ بر بازه بسته $[a,b]$ نزولی اکید و پیوسته باشد. در این صورت:

$(i)$ $f$ دارای تابع معکوس $f^{-1}$ است که بر بازه $\left[f(b),\, f(a)\right]$ تعریف شده است،
$(ii)$ $f^{-1}$ بر $\left[f(b),\, f(a)\right]$ نزولی اکید است،
$(iii)$ $f^{-1}$ بر $\left[f(b),\, f(a)\right]$ پیوسته است.

**مثال ۳۷:** نشان دهید که تابع $f$ با ضابطه $f(x)=x^2-2x$ بر بازه $I=(1,+\infty)$ صعودی اکید و پیوسته است. تابع $f^{-1}$ را پیدا کنید و حوزه تعریف آن را مشخص نمایید.

**حل:** ابتدا نشان می دهیم که $f$ بر $I$ صعودی اکید است. می توانیم بنویسیم

$$f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$$

حال فرض کنیم $x_1, x_2 \in I$ و $x_1 > x_2$، پس

$$x_1 > x_2 \Rightarrow x_1-1 > x_2-1 \Rightarrow (x_1-1)^2 > (x_2-1)^2 \Rightarrow$$
$$(x_1-1)^2-1 > (x_2-1)^2-1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

بنابراین اگر $x_1 > x_2$، آنگاه $f(x_1) > f(x_2)$ ، یعنی $f$ بر $I$ صعودی اکید است.

البته با استفاده از مشتق یک تابع هم می توان در مورد صعودی یا نزولی بودن آن در بازه های مورد نظر بحث کرد که چون هنوز ما به مشتق نپرداخته ایم، تنها راه بررسی صعودی و نزولی بودن در این فصل همان استفاده مستقیم از تعریف است. برای یافتن $f^{-1}$ می نویسیم $y=x^2-2x$ و یا $x^2-2x-y=0$. این معادله را برای $x$ حل می کنیم:

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+4y}}{2}=1\pm\sqrt{1+y}$$

چون $x>1$ ، تنها علامت مثبت را در نظر می گیریم. بنابراین

$$x=f^{-1}(y)=1+\sqrt{1+y}$$

می دانیم که قلمرو (حوزه تعریف ) $f^{-1}$ همان برد (حوزه مقادیر ) $f$ است و ما این را با شرط $x>1$ معین می نماییم. حال $x>1 \Rightarrow 1+\sqrt{1+y}>1 \Rightarrow \sqrt{1+y}>0$ که تنها برای $y>-1$ درست است.

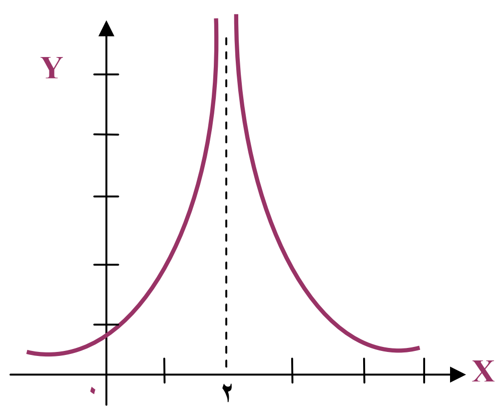
بنابراین قلمرو $f^{-1}$ بازه $J=(-1,+\infty)$ است.

## ۸.۲ حد بینهایت

طبیعت گراف $y=f(x)$ برای بعضی توابع $f$ را می توان با بررسی آنچه کـه حـد بینهایـت و حـد در بینهایت نامیده می شود ، عمیق تر درک کرد. در بررسی های ما از عمل حد $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ تا اینجا ، فرض کرده ایم که هر دوی $a$ و $L$ متناهی باشند . به یک معنی که بعدا آن را به دقت بیان می کنـیم می خواهیم اجازه دهیم که مقدار $a$ و $L$ بینهایت شوند. اما قبل از بیان دقیق تعریف به بررسـی یـک مثال می پردازیم:

فرض کنیم تابع $f$ با ضابطه $f(x)=\dfrac{3}{(x-2)^2}$ تعریف شده باشد. گراف تابع را درشکل زیـر مشـاهده می کنید. ما مقادیر تابع $f$ را بررسی می نماییم وقتی که $x$ به عدد 2 نزدیک گردد. با فرض آنکه $x$ از سمت راست به 2 نزدیک شود مقادیر $f(x)$ در جدول زیر ثبت می کنیم:

| $x$ | $3$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{7}{3}$ | $\frac{9}{4}$ | $\frac{21}{10}$ | $\frac{201}{100}$ | $\frac{2001}{1000}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)=\dfrac{3}{(x-2)^2}$ | 3 | 12 | 27 | 48 | 300 | 30000 | 300000 |




شکل ۲ . ۲۳

از این جدول به طور شهودی می بینیم که وقتی $x$ با مقادیر بزرگتر از 2 به عدد 2 نزدیکتر و نزدیکتر گردد ، $f(x)$ بدون کران (به طور نامحدود ) افزایش می یابد. به بیان دیگر ، می توانیم $f(x)$ را به قدر دلخواه بزرگ سازیم، به شرط آنکه $x$ را به قدر کافی نزدیک به 2 اختیار کنیم. برای نشان دادن این مطلب که $f(x)$ بدون کران افزایش می یابد وقتی $x$ با مقادیر بزرگتر از 2به عدد 2 نزدیک می شود ، می نویسیم

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3}{(x-2)^2}=+\infty.$$

اگر فرض کنیم که $x$ به عدد 2 از سمت چپ نزدیک شود ، آنگاه مقادیر $f(x)$ را که در جـدول زیـر ثبت شده است ، بدست می آوریم:

| $x$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{7}{4}$ | $\frac{19}{10}$ | $\frac{199}{100}$ | $\frac{1999}{1000}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)=\frac{3}{(x-2)^2}$ | 3 | 12 | 27 | 48 | 300 | 30000 | 300000 |

از این جدول نیز به طور شهودی می بینیم که وقتی $x$ با مقادیر کوچکتر از 2 بـه عـدد 2 نزدیکتـر و نزدیکتر شود ، $f(x)$ بدون کران (به طور نامحدود ) افزایش می یابد. بنابراین می نویسیم

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3}{(x-2)^2}=+\infty$$

بنابراین، وقتی $x$ یا از راست و یا از چپ به 2 میل کنـد، $f(x)$ بـدون کـران افـزایش مـی یابـد و مـی نویسیم

$$\lim_{x\to 2}\frac{3}{(x-2)^2}=+\infty$$

تعریف زیر را داریم

**تعریف:** فرض کنیم تابع $f$ در یک بازه باز $I$ شامل نقطه $a$ ، به استثنای احتمالا خود $a$ ، تعریف شده باشد. گوییم وقتی $x$ به $a$ میل می کند، $f(x)$ **بدون کران افزایش** می یابد، و می نویسیم

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad (۱)$$

در صورتی که به ازای هر $M>0$ ،عددی مانند $\delta>0$ وجود داشته باشد به طوری که
اگر $0<|x-a|<\delta$، آنگاه $f(x)>M$

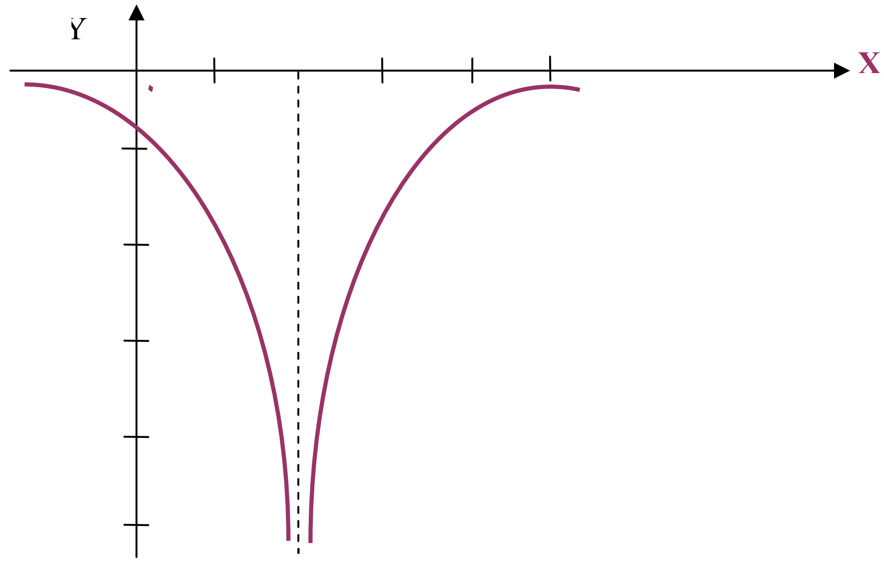
به عبارت ساده، تعریف بالا بیان می کند که می توانیم $f(x)$ را به قدر دلخواه بزرگ بسازیم (یعنی، بزرگتراز هرعدد مثبت $M$ ) به شرط آنکه $x$ را به قدر کافی نزدیک به $a$ اختیار کنیم.

**توجه:** بایستی تصریح کنیم که $+\infty$ یک عدد حقیقی نیست. بنابراین، وقتی می نویسیم $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$، این همان معنای $\lim_{x\to a} f(x) = L$ را، که در آن $L$ عددی حقیقی است، ندارد. معادله (۱) را می توان بدین صورت خواند: « حد $f(x)$ وقتی $x$ به $a$ میل می کند ، مثبت بینهایت است ». در چنین حالتی حد وجود ندارد، اما علامت « $+\infty$» رفتار مقادیر تابع $f(x)$ را وقتی $x$ به $a$ نزدیکتر و نزدیکتر می شود ، نشان می دهد.

به روشی مشابه، می توانیم رفتار تابعی را نمایش دهیم که مقادیر آن بدون کران کاهش می یابد. برای درک بهتر تابع $g$ را که با معادله $g(x)=\dfrac{-3}{(x-2)^2}$ تعریف شده است، در نظر می گیریم. گراف تابع در شکل زیر نشان داده است.

مقادیر تابع که با $g(x)=\dfrac{-3}{(x-2)^2}$ داده شده اند، منفی های مقادیر تابع داده شده با $f(x)=\dfrac{3}{(x-2)^2}$ هستند. لذا برای تابع $g$ وقتی $x$ ، یا از راست و یا از چپ، به 2 میل می کند، $g(x)$ بدون کران کاهش می یابد، و می نویسیم

$$\lim_{x\to 2}\frac{-3}{(x-2)^2} = -\infty$$




شکل ۲ . ۲۴

در حالت کلی تعریف زیر را داریم.

**تعریف:** فرض کنیم تابع $f$ در یک فاصله باز $I$ شامل نقطه $a$ ، به استثنای احتمالا خود $a$ ، تعریف شده باشد.

گوییم وقتی $x$ به $a$ میل می کند، $f(x)$ **بدون کران کاهش** می یابد، و می نویسیم

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \quad (۲)$$

در صورتی که به ازای هر $M>0$، عددی مانند $\delta>0$ وجود داشته باشد به طوری که

اگر $0<|x-a|<\delta$، آنگاه $f(x)<-M$ .

**توجه:** معادله (۲) را می توان بدین صورت خواند: « حد $f(x)$ وقتی $x$ به $a$ میل می کند، منفی بینهایت است» و مجددا توجه می کنیم که حد وجود ندارد و علامت «$-\infty$» فقط رفتار مقادیر تابع را وقتی $x$ به $a$ میل می کند، نشان می دهد. همچنین می توانیم حدود یکطرفه ای را که بینهایت هستند، بررسی نماییم.

**تعریف:** فرض کنیم تابع $f$ در بازه $(a,c)$ تعریف شده باشد. گوییم وقتی $x$ در این بازه به $a$ میل می کند ، تابع $f(x)$ **بدون کران افزایش** می یابد و می نویسیم $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$،

در صورتی که به ازای هر $M>0$، عددی مانند $\delta>0$ وجود داشته باشدبه طوری که

اگر $0<x-a<\delta$، آنگاه $f(x)>M$

**تعریف:** فرض کنیم تابع در بازه $(a,c)$ تعریف شده باشد، گوییم وقتی $x$ در این بازه به $a$ میل می کند ، تابع $f(x)$ **بدون کران کاهش** می یابد و می نویسیم $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.
در صورتی که به ازای هر $M>0$ عددی مانند $\delta>0$ وجود داشته باشد به طوری که
اگر $0<x-a<\delta$، آنگاه $f(x)<-M$

تعریف های مشابهی را می توان برای $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$، و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ ارایه داد.
به عنوان مثال فرض کنیم تابع $f$ در بازه $(d,a)$ تعریف شده باشد. گوییم وقتی $x$ در این بازه بـه $a$ میل می کند، تابع $f(x)$ بدون کران کاهش می یابد و می نویسیم $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ در صورتی که به ازای هر $M>0$، عددی مانند $\delta>0$وجود داشته باشد به طوری که
اگر $-\delta<x-a<0$، آنگاه $f(x)<-M$

اکنون فرض کنیم $h$ تابعی باشد که با معادله

$$h(x)=\frac{2x}{x-1} \quad (۳)$$

تعریف شده است. در زیرگراف تابع را مشاهده می کنید وبا مقایسه آن با گراف های دوتابع، مثال هـای قبلی اختلاف در رفتار این تابع با دو تابع قبلی به وضوح دیده می شود. ملاحظه می کنیم که

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x}{x-1}=+\infty \text{ و } \lim_{x\to 1^-}\frac{2x}{x-1}=-\infty$$

شکل ۲ . ۲۵

یعنی، برای تابع با ضابطه(۳)، وقتی $x$ با مقادیر کمتر از $1$ به عدد $1$ میل می کند، مقادیر تابع بدون کران کاهش می یابند، و وقتی $x$ با مقادیر بیشتر از $1$ به عدد $1$ میل می کند، مقادیر تابع بدون کران افزایش می یابند.

**مثال۳۸:** با استفاده از تعریف نشان دهید که $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2}=+\infty$ .

**حل:** بایستی نشان دهیم که

$$\forall M>0\exists\delta>0 \ni 0<|x-1|<\delta \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2}>M$$

داریم
$$\frac{1}{(1-x)^2}>M \Leftrightarrow (1-x)^2<\frac{1}{M} \Leftrightarrow |1-x|<\frac{1}{\sqrt{M}} \Leftrightarrow |x-1|<\frac{1}{\sqrt{M}}$$

بنابراین کافی است $0<\delta\le\frac{1}{\sqrt{M}}$ اختیار شود.

**قضیه۱۶:** اگر $n$ عددی طبیعی باشد، آنگاه

الف) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty$ ب) $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=\begin{cases}+\infty & , \quad n \text{ زوج} \\ -\infty & , \quad n \text{ فرد}\end{cases}$

**اثبات:** الف) بایستی نشان دهیم که برای هر $M>0$، عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به طوری که اگر $0<x<\delta$، آنگاه $\frac{1}{x^n}>M$.

یا، به عبارت معادل، چون $x>0$ و $M>0$، اگر $0<x<\delta$، آنگاه $x^n<\frac{1}{M}$.

یا، به عبارت معادل، چون $n>0$، اگر $0<x<\delta$، آنگاه $x<(\frac{1}{M})^{\frac{1}{n}}$.حکم بالابرقرار است، هرگاه $\delta=(\frac{1}{M})^{\frac{1}{n}}$ اختیار شود. نتیجه می گیریم که با انتخاب $\delta=(\frac{1}{M})^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{M}}$، از $0<x<\delta$ به دست می آوریم که $\frac{1}{x^n}>M$.

ب )فرض کنیم $n$ زوج باشد. می خواهیم نشان دهیم که برای هر $M>0$، عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به طوری که اگر $-\delta<x<0$، آنگاه $\frac{1}{x^n}>M$ یا، به عبارت معادل، چون $x^n>0$ و $M>0$، اگر $-\delta<x<0$، آنگاه $x^n<\frac{1}{M}$. یا، به عبارت معادل، چون $n>0$، اگر $-\delta<x<0$،

آنگاه $|x| < \sqrt[n]{\frac{1}{M}}$.اکنون کافی است $0 < \delta = \sqrt[n]{\frac{1}{M}} = \frac{1}{\sqrt[n]{M}}$ اختیار کنیم. می بینیم که اگر $-\sqrt[n]{1/M} < x < 0$، آنگاه $\frac{1}{x^n} > M$ .

در مرحله بعد فرض کنیم $n$ فرد باشد. می خواهیم نشان دهیم که برای هر $M > 0$، عددی مانند $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که اگر $-\delta < x < 0$، آنگاه $\frac{1}{x^n} < -M$.

اما با توجه به اینکه $n$ فرد و $x < 0$ و $-M < 0$، داریم

$$\frac{1}{x^n} < -M \Leftrightarrow \frac{-1}{x^n} > M \Leftrightarrow -x^n < \frac{1}{M} \Leftrightarrow x^n > \frac{-1}{M}$$

و به عبارت معادل $x > \sqrt[n]{\frac{-1}{M}} = -\sqrt[n]{\frac{1}{M}}$. پس کافی است $\delta = \sqrt[n]{1/M}$ اختیار شود. می بینیم که اگر $-\delta < x < 0$، آنگاه $\frac{1}{x^n} < -M$ و اثبات قضیه تمام است.

**تبصره ۱ :** با استفاده از تعریف های گفته شده به سادگی دیده می شود که شرط لازم و کافی برای آنکه $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$، آن است که $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ و نیز شرط لازم و کافی برای آنکه $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ آن است که

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

**تبصره۲:** از قضیه۱۶ نتیجه می شود که اگر $n$ عددی زوج باشد، آنگاه: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n} = +\infty$.

اکنون به بیان و اثبات قضیه ای می پردازیم که در حل بسیاری از مسایل مورد استفاده قرار می گیرد.

**قضیه۱۷:** فرض کنیم $a$ عددی حقیقی باشد و $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to a} g(x) = c$، که در آن $c$ عددی مخالف با صفر است. در این صورت:

الف) اگر $c > 0$ و اگر $f(x)$ با مقادیر مثبت به سمت صفر میل کند، آنگاه $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$.

ب) اگر $c > 0$ و اگر $f(x)$ با مقادیر منفی به صفر میل کند، آنگاه $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$.

ج) اگر $c < 0$ و اگر $f(x)$ با مقادیر مثبت به صفر میل کند، آنگاه $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$.

د) اگر $c < 0$ و اگر $f(x)$ با مقادیر منفی به صفر میل کند، آنگاه $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$.

قضیه برقرار است هرگاه به جای $x \to a$ شرط های $x \to a^+$ یا $x \to a^-$ را قرار دهیم.

**اثبات:** ما تنها قسمت ( الف ) را ثابت می نماییم و اثبات بقیه را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می کنیم.برای اثبات $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=+\infty$ بایستی نشان دهیم که برای هر $N>0$ ، عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به طوری که

(۱) اگر $0<|x-a|<\delta$، آنگاه $\frac{g(x)}{f(x)}>N$

چون $\lim_{x\to a}g(x)=c>0$، با گرفتن $\varepsilon=\frac{1}{2}c$ در تعریف حد، نتیجه می شود که عددی مانند $\delta_1>0$ وجود دارد به طوری که اگر $0<|x-a|<\delta_1$، آنگاه $|g(x)-c|<\frac{1}{2}c$

و با استفاده از خواص نامساوی ها نتیجه می شود که اگر $0<|x-a|<\delta_1$، آنگاه $\frac{-1}{2}c<g(x)-c<\frac{1}{2}c$. یا، به عبارت معادل، اگر $0<|x-a|<\delta_1$، آنگاه $\frac{1}{2}c<g(x)<\frac{3}{2}c$.
بنابراین عددی مانند $\delta_1>0$ وجود دارد به طوری که

(۲) اگر $0<|x-a|<\delta_1$، آنگاه $g(x)>\frac{1}{2}c$.

اکنون $\lim_{x\to a}f(x)=0$. بنابراین برای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند $\delta_2>0$ وجود دارد به طوری که اگر $0<|x-a|<\delta_2$، آنگاه $|f(x)|<\varepsilon$.
چون $f(x)$ با مقادیر مثبت به صفر میل می کند، می توانیم علامت قدر مطلق را از $f(x)$ برداریم.
بنابراین، برای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta_2>0$ وجود دارد به طوری که

(۳) اگر $0<|x-a|<\delta_2$، آنگاه $f(x)<\varepsilon$ .

از عبارت های (۲) و (۳) نتیجه می گیریم که برای هر $\varepsilon>0$ اعدادی مانند $\delta_1>0$ و $\delta_2>0$ وجود دارند به طوری که اگر $0<|x-a|<\delta_1$ و $0<|x-a|<\delta_2$، آنگاه $\frac{g(x)}{f(x)}>\frac{\frac{1}{2}c}{\varepsilon}$.

بنابراین، اگر $\varepsilon=\frac{c}{2N}$ و $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ اختیار شود، آنگاه $0<|x-a|<\delta$ نتیجه می دهد که $\frac{g(x)}{f(x)}>\frac{\frac{1}{2}c}{c/2N}$. که همان حکم (۱) است. بدین ترتیب قسمت (الف) ثابت شده است.

**مثال۳۹:** حدود زیر را پیدا کنید:

الف) $\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3}$          ب) $\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3}$

**حل:** الف) $\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+2x+2}{(x-3)(x+1)}$

به سادگی دیده می شود که $\lim_{x\to 3^+}(x^2+x+2)=14$. همچنین

$$\lim_{x\to 3^+}(x-3)(x+1)=\lim_{x\to 3^+}(x-3).\lim_{x\to 3^+}(x+1)=0.4=0$$

حد مخرج صفر است و مخرج با مقادیر مثبت به صفر میل می کند. در این صورت با به کار بردن قضیه۱۷(الف) به دست می آوریم که $\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3}=+\infty$.

ب) $\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2+2x+2}{(x-3)(x+1)}$

مانند (الف) حد صورت کسر برابر با 14 است. داریم $\lim_{x\to 3^-}(x-3)(x+1)=0.4=0$

در این حالت حد مخرج صفر می شود، ولی مخرج با مقادیر منفی به صفر میل می کند. پس با به کار بردن قضیه ۱۷(ب) داریم $\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x-3}=-\infty$.

## مثال۴۰: حدود زیر را پیدا کنید:

الف) $\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ ب) $\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$ ج) $\lim_{x\to 4^-}\frac{[x]-4}{x-4}$

**حل:** الف) چون $x\to 2^+$، $x-2>0$ و بنابراین $x-2=\sqrt{(x-2)^2}$. لذا

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{\sqrt{(x-2)^2}}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$$

حد صورت برابر با 2 است. حد مخرج صفر است و مخرج با مقادیر مثبت به صفر میل می کند. بنابراین با استفاده از قضیه ۱۷(الف) داریم $\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}=+\infty$.

ب) چون $x\to 2^-$، $x-2<0$ و بنابراین $x-2=-(2-x)=-\sqrt{(2-x)^2}$. لذا

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{2-x}\sqrt{2+x}}{-\sqrt{2-x}\sqrt{2-x}}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{2+x}}{-\sqrt{2-x}}$$

حد صورت برابر با 2 است. حد مخرج صفر است و مخرج با مقادیر منفی به صفر میل می کند. پس با استفاده از قضیه ۱۷(ب) داریم $\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}=-\infty$.

ج) $\lim_{x\to 4^-}[x]=3$. بنابراین $\lim_{x\to 4^-}([x]-4)=-1$.

به علاوه، $\lim_{x\to 4^-}(x-4)=0$، و $x-4$ با مقادیر منفی به صفر میل می کند. پس بنابر قضیه ۱۷(د) بدست می آوریم که $\lim_{x\to 4^-}\frac{[x]-4}{x-4}=+\infty$.

**مثال۴۱:** با استفاده از تعریف حد ثابت کنید که:

الف) $\lim_{x\to 1^-}\frac{2x-1}{x-1}=-\infty$ ب) $\lim_{x\to 2^+}\frac{(-1)^{[x]}}{4-x^2}=-\infty$

**حل:** الف) بایستی نشان دهیم که

$$\forall M>0\exists\delta>0 \ni -\delta<x-1<0\Rightarrow\frac{2x-1}{x-1}<-M$$

اما داریم

$$\frac{2x-1}{x-1}<-M\Leftrightarrow\frac{2x-2+1}{x-1}<-M\Leftrightarrow 2+\frac{1}{x-1}<-M\Leftrightarrow\frac{1}{x-1}<-M-2$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{x-1}<-(M+2)\Leftrightarrow\frac{-1}{x-1}>M+2\Leftrightarrow\frac{x-1}{-1}<\frac{1}{M+2}\Leftrightarrow x-1>\frac{-1}{M+2}$$

توجه کنید که ما در اینجا فرض می کنیم $x-1<0$ . اکنون کافی است $0<\delta\le\frac{1}{M+2}$ اختیار کنیم.

ب) بایستی نشان دهیم که

$$\forall M>0\exists\delta>0 \ni 0<x-2<\delta\Rightarrow\frac{(-1)^{[x]}}{4-x^2}<-M$$

چون $x\to 2^+$ از ابتدا می توان فرض کرد که $2<x<3$ و بنابراین $[x]=2$. داریم

$$\frac{(-1)^{[x]}}{4-x^2}=\frac{1}{4-x^2}<-M\Leftrightarrow\frac{1}{(2-x)(2+x)}<-M\Leftrightarrow\frac{1}{-(x-2)(x+2)}<$$
$$-M\Leftrightarrow\frac{1}{(x-2)(x+2)}>M$$

حال از $2<x<3$ به دست می آوریم $0<x-2<1$ و نیز

$$4<x+2<5\Leftrightarrow\frac{1}{5}<\frac{1}{x+2}<\frac{1}{4}$$

بدیهی است که $\frac{1}{(x-2)(x+2)}>\frac{1}{5(x-2)}$، پس اگر قرار دهیم $\frac{1}{5(x-2)}>M$، آنگاه مسلم است که $\frac{1}{(x-2)(x+2)}>M$. اما

$$\frac{1}{5(x-2)}>M\Leftrightarrow\frac{1}{x-2}>5M\Leftrightarrow x-2<\frac{1}{5M}$$

اکنون کافی است $\delta = \min\left\{1, \frac{1}{5M}\right\}$ اختیار شود.

**تبصره مهم:** نوع دیگری از حد بینهایت وجود دارد که از جامعیت بیشتری نسبت به تعریف هایی که تاکنون در این قسمت گفته شد برخوردار است. ما اکنون به بیان آن و ذکر چند مثال می پردازیم.

**تعریف:** فرض کنیم تابع $f(x)$ در یک همسایگی محذوف نقطه $x_0$ تعریف شده باشد، گفته می شود که وقتی $x$ به $x_0$ میل می کند $f(x)$ **به بینهایت میل می کند**، در صورتی که به ازای هر $M > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $0 < |x - x_0| < \delta$، آنگاه $|f(x)| > M$.

این مطلب با نوشتن $f(x) \to \infty$ وقتی $x \to x_0$ یا $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ بیان می گردد.

**تذکر:** ما قبلا با نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ به عنوان نقاط انتهایی بازه های نامتناهی آشنایی پیدا کرده ایم. این نمادها را با $\infty$ اشتباه نکنید.

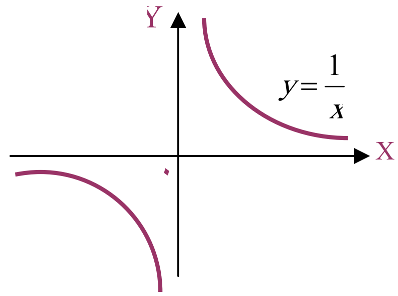
**مثال ۴۲:** نشان دهید که

الف) $(x \neq 0)$ , $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$　　　　ب) $(x \neq \pm 1)$ , $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x^2 - 1} = \infty$

**حل:** الف) گراف تابع در شکل زیر دیده می شود. بایستی نشان دهیم که

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 (0 < |x| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| > M)$$

اما $\left|\frac{1}{x}\right| > M \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} > M \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{M}$. حال کافی است $0 < \delta \leq \frac{1}{M}$ اختیار گردد.




شکل ۲ . ۲۶

ب) گراف تابع در شکل زیر دیده می شود.

شکل ۲ . ۲۷

بایستی نشان دهیم که

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2-1}\right| > M$$

داریم $\frac{1}{|x-1||x+1|} > M \Leftrightarrow \frac{1}{|(x-1)(x+1)|} > M \Leftrightarrow \frac{1}{|x^2-1|} > M$.

اگر از ابتدا فرض کنیم که $\delta \le 1$، آنگاه

$$|x-1|<1 \Leftrightarrow -1<x-1<1 \Leftrightarrow 1<x+1<3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}<\frac{1}{x+1}<1$$

پس با این فرض $\frac{1}{|x-1||x+1|}>\frac{1}{3|x-1|}$

اکنون اگر $\frac{1}{3|x-1|}>M$، آنگاه بدیهی است که $\frac{1}{|x-1||x+1|}>M$.

اما $\frac{1}{3|x-1|}>M \Leftrightarrow 3|x-1|<\frac{1}{M} \Leftrightarrow |x-1|<\frac{1}{3M}$.حال کافی است $\delta=\min\left\{1,\frac{1}{3M}\right\}$اختیارشود.

## قضیه های حد بینهایت

در این قسمت به بیان و اثبات قضایایی می پردازیم که در محاسبه حدود مفید هستند.

## قضیه۱۸:

الف) اگر $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L$ ( یا $\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$)، آنگاه $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=+\infty$.

ب) اگر $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L$ ( یا $\lim_{x\to a} g(x)=-\infty$)، آنگاه $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=-\infty$.

## اثبات:

الف) برای اثبات $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=+\infty$ بایستی نشان دهیم که

$$\forall M>0 \exists \delta>0 \ni 0<|x-a|<\delta \Rightarrow (f(x)+g(x))>M$$

چون $\lim_{x\to a} g(x)=L$، پس برای $\varepsilon_1=1$ عددی مانند $\delta_1>0$ وجود دارد به طوری که اگر $0<|x-a|<\delta_1$، آنگاه $|g(x)-L|<1$. اما

$$|g(x)-L|<1 \Leftrightarrow -1<g(x)-L<1 \Leftrightarrow L-1<g(x)<L+1$$

بنابراین از $0<|x-a|<\delta_1$ نتیجه می شود که $g(x)>L-1$.

چون $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$، پس برای عدد مثبت $M_1 \ge M-(L-1)$ عددی مانند $\delta_2>0$ وجود دارد به طوری که اگر $0<|x-a|<\delta_2$، آنگاه $f(x)>M_1$ .

اکنون فرض کنیم که $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ و $0 < |x-a| < \delta$، پس در عین حال $f(x) > M_1 \geq M-(L-1)$ و $g(x) > L-1$. بنابراین

$$f(x) + g(x) > M-(L-1)+(L-1) = M$$

خلاصه، برای هر $M > 0$ ، عددی مانند $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که اگر $0 < |x-a| < \delta$ آنگاه $f(x)+g(x) > M$ .

در حالتی که $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ اثبات به صورت زیر است. چون $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$، پس برای عدد مثبت $M_1 < M$ عددی مانند $\delta_1 > 0$ وجود دارد. به طوری که اگر $0 < |x-a| < \delta_1$، آنگاه $f(x) > M_1$ .

چون $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$، پس برای عدد مثبت $M_2 = M - M_1 > 0$ عددی مانند $\delta_2 > 0$ وجود دارد به طوری که اگر $0 < |x-a| < \delta_2$، آنگاه $g(x) > M_2$.

حال قرار می دهیم $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ و فرض می کنیم $0 < |x-a| < \delta$، پس در عین حال $f(x) > M_1 \quad , \quad g(x) > M_2$ و لذا $f(x)+g(x) > M_1 + M_2 = M$ .

خلاصه $\forall M > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x)+g(x) > M$ .یعنی

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty.$$

ب ) اثبات مشابه حالت (الف) است و آن را به عنوان تمرین انجام دهید.

**قضیه۱۹:** اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ و $L \neq 0$، آنگاه

الف) برای $L > 0$، داریم $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$.

ب) برای $L < 0$، داریم $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = -\infty$.

## اثبات:

الف) برای اثبات $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$ بایستی نشان دهیم که

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x)g(x) > M$$

چون $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L > 0$ پس برای $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$ عددی مانند $\delta_1 > 0$ وجود دارد به طوری که اگر $0 < |x-a| < \delta_1$، آنگاه $|g(x)-L| < \frac{L}{2}$.

اما $\quad |g(x)-L| < \frac{L}{2} \Leftrightarrow \frac{-L}{2} < g(x)-L < \frac{L}{2} \Leftrightarrow \frac{L}{2} < g(x) < \frac{3L}{2}$

چون $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$، پس برای $M_1=\frac{M}{(L/2)}>0$ عددی مانند $\delta_2>0$ وجود دارد به طوری که اگر $0<|x-a|<\delta_2$، آنگاه $f(x)>M_1$ .

اکنون فرض کنیم $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ و $0<|x-a|<\delta$، پس در عین حال

$$f(x)>\frac{M}{(L/2)} \quad , \quad g(x)>\frac{L}{2}.$$

بنابراین $f(x).g(x)>\frac{M}{(\frac{L}{2})}.\frac{L}{2}=M$. پس برای هر $M>0$ عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به طوری که اگر $0<|x-a|<\delta$، آنگاه $f(x)g(x)>M$ .

ب) برای اثبات $\lim_{x\to a} f(x).g(x)=-\infty$ بایستی نشان دهیم که

$$\forall M>0\exists\delta>0 \ni 0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x).g(x)<-M$$

چون $\lim_{x\to a} g(x)=L<0$، پس برای $\varepsilon_1=\frac{-L}{2}>0$ عددی مانند $\delta_1>0$ وجود دارد به طوری که اگر $0<|x-a|<\delta_1$، انگاه $|g(x)-L|<\frac{-L}{2}$. اما

$$|g(x)-L|<\frac{-L}{2}\Leftrightarrow\frac{L}{2}<g(x)-L<\frac{-L}{2}\Leftrightarrow\frac{3L}{2}<g(x)<\frac{L}{2}\Leftrightarrow\frac{-L}{2}<-g(x)<\frac{-3L}{2}$$

چون $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$، پس برای $M_1=\frac{M}{(-L/2)}$ عددی مانند $\delta_2>0$ وجود دارد به طوری که اگر $0<|x-a|<\delta_2$، آنگاه $f(x)>M_1$ .

حال فرض کنیم $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ و $0<|x-a|<\delta$ پس در عین حال

$$f(x)>M_1 \quad , \quad -g(x)>\frac{-L}{2}$$

در نتیجه $-f(x)g(x)>M_1(\frac{-L}{2})$ و یا $-f(x)g(x)>\frac{M}{(-L/2)}.(-L/2)$ یعنی $-f(x)g(x)>M$ که از آن نتیجه می شود $f(x)g(x)<-M$ .

پس برای هر $M>0$ عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به طوری که اگر $0<|x-a|<\delta$، آنگاه $f(x)g(x)<-M$ و اثبات تمام است.

**قضیه۲۰:** اگر $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L$ و $L\neq 0$، آنگاه

الف) برای $L>0$، داریم $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=-\infty$.

ب) برای $L<0$، داریم $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=+\infty$.

**اثبات:** مشابه قضیه۱۹ است.

**نکته:** قضیه های۱۸،۱۹،۲۰ برقرار هستند هرگاه به جای $x\to a$ قرار دهیم $x\to a^+$ یا $x\to a^-$.

**مثال۴۳:** (i) چون $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{x+4}=\frac{1}{4}$، پس بنابر قضیه۱۸ (الف) داریم

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}\right)=+\infty$$

(ii) چون $\lim\limits_{x\to 3}\frac{5}{(x-3)^2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+4}{x-4}=-7$، پس بنابر قضیه۱۹ (ب) داریم

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{5}{(x-3)^2}.\frac{x+4}{x-4}\right)=-\infty$$

(iii) در مثال ۴۰ (ب) نشان دادیم که $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}=-\infty$. بـه عـلاوه $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x+2}=-\frac{1}{4}$، پـس بنـابر قضیه۲۰(ب) داریم $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}.\frac{x-3}{x+2}\right)=+\infty$.

## ۲ . ۹ رفتار تابع در بینهایت

تابع $f$ با معادله $f(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}$ را در نظر می گیریم. گراف تابع در شکل زیر رسم شـده اسـت. فـرض کنیم $x$ مقادیر 0,1,2,3,4,5,10,100,1000، و الی آخر را اختیار کند، یعنی $x$ بدون کـران افـزایش یابـد. مقادیر متناظر تابع در جدول زیر داده شده است.

شکل ۲ . ۲۸

| $x$ | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ٤ | ٥ | ۱۰ | ۱۰۰ | ۱۰۰۰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$ | ۰ | ۱ | $\frac{8}{5}$ | $\frac{18}{10}$ | $\frac{32}{17}$ | $\frac{50}{26}$ | $\frac{200}{101}$ | $\frac{20000}{10001}$ | $\frac{2000000}{1000001}$ |

از جدول بالا می بینیم که وقتی $x$ با مقادیر مثبت افزایش مـی یابـد، مقـادیر تـابع $f(x)$ بـه عـدد $2$ نزدیکتر و نزدیکتر می شوند. بویژه، وقتی $x=4$ ، $2-\dfrac{2x^2}{x^2+1}=2-\dfrac{32}{17}=\dfrac{2}{17}$

بنابراین، وقتی $x=4$ اختلاف بین $2$ و $f(x)$ برابر با $\dfrac{2}{17}$ است. وقتی $x=100$ ،

$$2-\frac{2x^2}{x^2+1}=2-\frac{20000}{10001}=\frac{2}{10001}$$

بنابرابن، وقتی $x=100$ اختلاف بین $2$ و $f(x)$ برابر با $\dfrac{2}{10001}$ است.

با ادامه این روند، به صورت شهودی دیده می شود که می توانیم $f(x)$ را به قدر دلخواه بـه $2$ نزدیـک کنیم، به شرط آنکه $x$ را به قدر کافی بزرگ اختیار نماییم. به عبارت دیگر، می توانیم با گـرفتن $x$ بـه قدر کافی بزرگ اختلاف بین $x$ و $f(x)$ را به قدر داخواه کوچک اختیار کنیم، یا اگر قدمی فراتر نهـیم، برای هر $\varepsilon>0$، هر قدر کوچک، می توانیم عددی مانند $M>0$ پیدا کنیم، به طوری کـه اگـر $x>M$، آنگاه $|f(x)-2|<\varepsilon$.

وقتی متغیر مستقل $x$ با مقادیر مثبت بدون کران افزایش می یابد، می نویسیم $x\to+\infty$.

مثال توصیفی بالا را بدین صورت بیان می کنیم کـه $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2+1}=2$. در حالـت کلـی، تعریـف زیـر را داریم.

**تعریف:** فرض کنیم تابع $f$ در بازه $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد. گوییم **حد** $f(x)$ ، **وقتی $x$ بدون کران افزایش یابد، عدد $L$ است**، و می نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ در صورتی کـه بـه ازای هـر $\varepsilon>0$، عددی مانند $M>0$ وجود داشته باشد به طوری که

اگر $x>M$ ، آنگاه $|f(x)-L|<\varepsilon$.

**نکته:** وقتی می نویسیم $x\to+\infty$ ، این همان معنایی را ندارد که مثلا از $x\to1000$ انتظار می رود نماد « $x\to+\infty$ » نشانگر رفتار متغیر $x$ است. به هر حال، با در نظر گرفتن این نکته، حد $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

را بدین صورت می خوانیم: « حد $f(x)$ وقتی $x$ به سمت مثبت بینهایت میل می کند برابر با $L$ است ». اکنون همان تابع $f(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}$ را در نظر می گیریم و فرض می کنیم که $x$ مقادیر $0,-1,-2,-3,-4,-5,-10,-100,-1000$ و الی آخر را اختیار کند، یعنی $x$ روی مقادیر منفی بدون کران کاهش یابد. جدول زیر مقادیر متناظر تابع $f(x)$ را می دهد.

| $x$ | ۰ | -۱ | -۲ | -۳ | -٤ | -٥ | -۱۰ | -۱۰۰ | -۱۰۰۰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}$ | ۰ | ۱ | $\frac{8}{5}$ | $\frac{18}{10}$ | $\frac{32}{17}$ | $\frac{50}{26}$ | $\frac{200}{101}$ | $\frac{20000}{10001}$ | $\frac{2000000}{1000001}$ |

ملاحظه می کنیم که مقادیر تابع برای اعداد منفی دقیقا مساوی مقادیر تابع برای اعداد مثبت متناظر هستند. بنابراین، به طور شهودی می بینیم که وقتی $x$ بدون کران کاهش یابد، $f(x)$ به سمت 2 میل می کند و به صورت رسمی می گوییم که برای هر $\varepsilon>0$ ، هر قدر کوچک، می توانیم عددی مانند $M>0$ پیدا کنیم به طوری که اگر $x<-M$ ، آنگاه: $|f(x)-2|<\varepsilon$. با به کار بردن نماد « $x\to-\infty$ » می نویسیم

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}=2$$

در حالت کلی تعریف زیر را داریم

**تعریف:** فرض کنیم تابع $f$ در بازه $(-\infty,a)$ تعریف شده باشد. گوییم **حد** $f(x)$ ، **وقتی** $x$ **بدون کران کاهش می یابد، عدد** $L$ **است**، و می نویسیم $\lim_{x\to-\infty}f(x)=L$
در صورتی که به ازای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $M>0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $x<-M$ ، آنگاه $|f(x)-L|<\varepsilon$.

**مثال۴۴:** (i) با استفاده از تعریف نشان دهید که

$$(a)\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x}=1 \qquad ، \qquad (b)\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2-1}=0$$

(ii) نشان دهید که هیچ کدام از حدود $\lim_{x\to+\infty}\sin x$ و $\lim_{x\to-\infty}\sin x$ موجود نیستند.

**حل:** (i) برای اثبات $(a)$ یعنی، $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1$ بایستی نشان دهیم که

$$\forall\varepsilon>0\exists M>0(x>M\Rightarrow\left|\frac{x+1}{x}-1\right|<\varepsilon)$$

اما داریم

$$\left|\frac{x+1}{x}-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|(1+\frac{1}{x})-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow |x|>\frac{1}{\varepsilon}$$

چون $x\to+\infty$ ، پس، از ابتدا می توان فرض کرد که $x>0$ . بنابراین داریم $|x|>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x>\frac{1}{\varepsilon}$ و اکنون کافی است که $M=\frac{1}{\varepsilon}$ اختیار شود. به طریق مشابه نشان می دهیم که $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x}=1$ ، یعنی مانند بالا

$$\left|\frac{x+1}{x}-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow |x|>\frac{1}{\varepsilon}$$

اما چون $x\to-\infty$ ، از ابتدا می توان فرض کردکه $x<0$ ، پس

$$|x|>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow -x>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x<-\frac{1}{\varepsilon}$$

و مجددا $M=\frac{1}{\varepsilon}$ را اختیار می کنیم.

برای اثبات $(b)$ یعنی، $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2-1}=0$ بایستی نشان دهیم که

$$\forall\varepsilon>0\exists M>0 \ni x>M \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2-1}\right|<\varepsilon$$

چون $x\to+\infty$ ، از ابتدا می توان فرض کرد که $x>1$ ، و لذا $x^2-1>0$ . پس

$$\left|\frac{1}{x^2-1}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x^2-1}<\varepsilon \Leftrightarrow x^2-1>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x^2>\frac{1}{\varepsilon}+1 \Leftrightarrow x>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}+1}$$

بنابراین کافی است $M=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}+1}$ اختیار شود.به طریق مشابه می توان ثابت کرد که $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2-1}=0$

(ii) اثبات به برهان خلف است. فرض کنیم که $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x=c$ . با انتخاب $\varepsilon=\frac{1}{2}$ می توانیم عددی مانند $M>0$ پیدا کنیم به طوری که اگر $x>M$ ، آنگاه $|\sin x-c|<\frac{1}{2}$. اکنون عدد صحیح و مثبت $n$ را چنان بزرگ انتخاب می کنیم که هر دو نقطه $x_1=(2n+\frac{1}{2})\pi$ و $x_2=(2n-\frac{1}{2})\pi$ در بازه $(M,+\infty)$ واقع گردند و بدیهی است که $\sin x_1=1$ و $\sin x_2=-1$ بنابراین داریم

$$|\sin x_1-c|=|1-c|<\frac{1}{2} \text{ و } |\sin x_2-c|=|1+c|<\frac{1}{2}$$

حال می توانیم بنویسیم

$$2=|(1-c)+(1+c)|\le|1-c|+|1+c|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

که تناقضی آشکار است. و به روشی مشابه می توانیم نشان دهیم که $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$ نیز موجود نیست.

**نکته:** ۱) نماد $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=L$ به معنی $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ است.
۲) کلیه قضایای حدی که تاکنون بیان کرده ایم برقرار هستند هرگاه به جای $x\to a$ قرار دهیم $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$. به علاوه قضیه زیر را هم داریم.

**قضیه۲۱:** اگر $n$ عددی طبیعی باشد، آنگاه

الف) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$ ب) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$.

**اثبات:** الف) بایستی نشان دهیم که $\forall\varepsilon>0\exists M>0 \ni x>M\Rightarrow\left|\frac{1}{x^n}-0\right|<\varepsilon$

اما

$$\left|\frac{1}{x^n}-0\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{1}{x^n}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|x^n\right|>\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow|x|>\sqrt[n]{\frac{1}{\varepsilon}}$$

(زیرا $n$ عددی صحیح و مثبت است). چون $x\to+\infty$، پس، از ابتدا می توان فرض کرد که $x>0$.

بنابراین $|x|>\sqrt[n]{\frac{1}{\varepsilon}}\Leftrightarrow x>\sqrt[n]{\frac{1}{\varepsilon}}$

پس کافی است $M=\sqrt[n]{\frac{1}{\varepsilon}}$ اختیار شود.

ب) مشابه (الف) است و آن را به عنوان تمرین ثابت کنید.

**مثال۴۵:** حدود زیر را محاسبه کنید:

$$(i)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{4x-3}{2x+5},\quad (ii)\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x+5}{4x^3-1},\quad (iii)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}$$

**حل:** از کلیه قضایای حد می توانیم استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-3}{2x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-3/x}{2+5/x}=\frac{\lim_{x\to+\infty}(4-3/x)}{\lim_{x\to+\infty}(2+5/x)}=\frac{4-\lim_{x\to+\infty}(3/x)}{2-\lim_{x\to+\infty}(5/x)}=\frac{4-3\times0}{2+5\times0}=2 \qquad \text{(i)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x+5}{4x^3-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2/x-1/x^2+5/x^3}{4-1/x^3}= \qquad \text{(ii)}$$

$$\frac{\lim_{x\to-\infty}(2/x-1/x^2+5/x^3)}{\lim_{x\to-\infty}(4-1/x^3)}=\frac{\lim_{x\to-\infty}(2/x)-\lim_{x\to-\infty}(1/x^2)+\lim_{x\to-\infty}(5/x^3)}{\lim_{x\to-\infty}4-\lim_{x\to-\infty}(1/x^3)}=\frac{2\times0-0+5\times0}{4-0}=0$$

(iii)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+4/x}{\sqrt{2x^2-5}/\sqrt{x^2}}$$

(چون $x>0$ ، می توان نوشت: $x=\sqrt{x^2}$ )

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(3+4/x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2-5/x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(3+4/x)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}(2-5/x^2)}}=\frac{3+\lim\limits_{x\to+\infty}(4/x)}{\sqrt{2-5\lim\limits_{x\to+\infty}(1/x^2)}}=\frac{3+4\times 0}{\sqrt{2-5\times 0}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

و

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+4/x}{\sqrt{2x^2-5}/(-\sqrt{x^2})}$$

(چون $x<0$ ، می توان نوشت $x=-\sqrt{x^2}$ )

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(3+4/x)}{\lim\limits_{x\to-\infty}(-\sqrt{2-5/x^2})}=\frac{3+\lim\limits_{x\to-\infty}(4/x)}{-\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}(2-5/x^2)}}$$

بقیه مراحل مشابه حالت $x\to+\infty$ است و بالاخره پاسخ را مساوی $-\frac{3}{\sqrt{2}}$ به دست می آوریم.

## تعریف:

الف) فرض کنیم تابع $f$ بر بازه $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد. گوییم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، در صورتی که به ازای هر $M_1>0$ عددی مانند $M_2>0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $x>M_2$ ، آنگاه $f(x)>M_1$ .

ب) فرض کنیم تابع $f$ بر بازه $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد. گوییم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، در صورتی که به ازای هر $M_1>0$ عددی مانند $M_2>0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $x>M_2$ ، آنگاه $f(x)<-M_1$ .

ج) فرض کنیم تابع $f$ بر بازه $(-\infty,a)$ تعریف شده باشد، گوییم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ در صورتی که به ازای هر $M_1>0$ عددی مانند $M_2>0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $x<M_2$ ، آنگاه $f(x)>M_1$ .

د) فرض کنیم تابع $f$ بر بازه $(-\infty,a)$ تعریف شده باشد. گوییم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، در صورتی که به ازای هر $M_1>0$ عددی مانند $M_2>0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $x<-M_2$ ، آنگاه $f(x)<-M_1$ .

**قضیه۲۲:** فرض کنیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=L$ ، که در آن $L\neq 0$ . در این صورت:

الف) اگر $L>0$ ، آنگاه: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\,f(x)=+\infty$ .

ب) اگر $L<0$ ، آنگاه: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\,f(x)=-\infty$ .

## اثبات:

الف) بایستی نشان دهیم که $\forall M>0 \exists M'>0 \ni x>M' \Rightarrow f(x)g(x)>M$.

چون $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=L>0$، پس به ازای $\varepsilon=\frac{L}{2}>0$ عددی مانند $M_1>0$ وجود دارد به طوری که اگر $x>M_1$، آنگاه $|g(x)-L|<\frac{L}{2}$. اما

$$|g(x)-L|<\frac{L}{2} \Leftrightarrow \frac{-L}{2}<g(x)-L<\frac{L}{2} \Leftrightarrow \frac{L}{2}<g(x)<\frac{3L}{2}$$

چون $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$، پس به ازای $N=M/(L/2)$ عددی مانند $N_1>0$ وجود دارد به طوری که اگر $x>N_1$، آنگاه $f(x)>M/(L/2)$ .

اکنون فرض کنیم $M'=\max\{M_1,N_1\}$ و $x>M'$، پس در عین حال داریم $g(x)>L/2$ و $f(x)>M/(L/2)$. بنابراین به دست می آوریم $f(x)g(x)>[M/(L/2)].L/2$ .

خلاصه برای هر $M>0$ عددی مانند $M'>0$ به دست آوردیم به طوری که اگر $x>M'$، آنگاه $f(x)g(x)>M$ .

ب) مشابه قسمت (الف) است و آن را به عنوان تمرین ثابت کنید.

**مثال ۴۶:** با استفاده از تعریف حد نشان دهید که $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-x^2}{x}=-\infty$.

**حل:** بایستی نشان دهیم که

$$\forall M>0 \exists M'>0 \ni x>M' \Rightarrow \frac{2-x^2}{x}<-M$$

اما داریم $\frac{2-x^2}{x}<-M \Leftrightarrow \frac{2}{x}-x<-M$

اگر از ابتدا فرض کنیم که $M'\geq 2$، پس $x>M'$ نتیجه می دهد که $x>2$ و لذا $\frac{2}{x}-x<1-x$. قرار می دهیم $1-x<-M$ که معادل است با $x-1>M \Leftrightarrow x>M+1$.

اگر $M'=\max\{M+1,2\}$ اختیار شود از $x>M'$ نتیجه می گیریم که $\frac{2-x^2}{x}<-M$.

**قضیه ۲۳:** شرط لازم و کافی برای آنکه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=c$ آن است که $\lim\limits_{\xi\to0^+} f^*(\xi)=\lim\limits_{\xi\to0^+} f(\frac{1}{\xi})=c$ ( $f^*(\xi)=f(\frac{1}{\xi})$ تعریف می شود) .

به طریق مشابه، شرط لازم و کافی برای آنکه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=c$ آن است که

$\lim\limits_{\xi\to0^-} f^*(\xi)=\lim\limits_{\xi\to0^-} f(\frac{1}{\xi})=c$.

**اثبات:** حالت $x \to +\infty$ را بررسی می کنیم. فرض کنیم $c \neq \pm\infty$، در این صورت می خواهیم نشان دهیم که $\lim\limits_{\xi \to 0^+} f^*(\xi) = \lim\limits_{\xi \to 0^+} f(\frac{1}{\xi}) = c$.

یعنی $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < \xi < \delta \Rightarrow \left| f(\frac{1}{\xi}) - c \right| < \varepsilon$.

چون $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c$، پس برای $\varepsilon > 0$ دلخواه عددی مانند $M > 0$ وجود دارد به طوری که اگر $x > M$، آنگاه $\left| f(x) - c \right| < \varepsilon$.

اما می توان نوشت

$$\left| f(x) - c \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| f(1/(1/x)) - c \right| < \varepsilon$$

( و با استفاده از متغیر جدید $\xi = \frac{1}{x}$)

$$\Leftrightarrow \left| f(\frac{1}{\xi}) - c \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| f^*(\xi) - c \right| < \varepsilon$$

حال اگر $\delta = \frac{1}{M}$ گرفته شود می بینیم که $x > M \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{M} \Leftrightarrow 0 < \xi < \delta$

و بنابراین $0 < \xi < \delta \Rightarrow \left| f(\frac{1}{\xi}) - c \right| < \varepsilon$.

اگر $c = +\infty$ می خواهیم نشان دهیم که $\lim\limits_{\xi \to 0^+} f(\frac{1}{\xi}) = +\infty$، یعنی

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < \xi < \delta \Rightarrow f(\frac{1}{\xi}) > M$$

اما چون $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$، پس برای $M > 0$ دلخواه عددی مانند $M' > 0$ وجود دارد به طوری که اگر $x > M'$، آنگاه $f(x) > M$ .

با گرفتن $\delta = \frac{1}{M}$ و تغییر متغیر $\xi = \frac{1}{x}$ به دست می آوریم که $0 < \xi < \delta \Rightarrow f(\frac{1}{\xi}) > M$

یعنی $\lim\limits_{\xi \to 0^+} f(\frac{1}{\xi}) = +\infty$.

حالت های باقیمانده $c = -\infty$ و $x \to -\infty$ را می توان به روشی مشابه اثبات کرد.حکم برعکس هریک ازحالات فوق را می توان با بیان مراحل استدلال، ولی به ترتیب عکس آنچه گفته شداثبات نمود.

**مثال۴۷:** مطلوب است محاسبه $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$.

**حل:** با استفاده از قضیه۲۳ داریم

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1})$$
$$=\lim_{\xi\to0^+}(\sqrt{\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{\xi}-1}-\sqrt{\frac{1}{\xi^2}-\frac{1}{\xi}+1})$$
$$=\lim_{\xi\to0^+}\frac{1}{\xi}(\sqrt{1+\xi-\xi^2}-\sqrt{1-\xi+\xi^2})=\lim_{\xi\to0^+}\frac{(\sqrt{1+\xi-\xi^2}-\sqrt{1-\xi+\xi^2})(\sqrt{1+\xi-\xi^2}+\sqrt{1-\xi+\xi^2})}{\xi(\sqrt{1+\xi-\xi^2}+\sqrt{1-\xi+\xi^2})}=$$
$$\lim_{\xi\to0^+}\frac{(1+\xi-\xi^2)-(1-\xi+\xi^2)}{\xi(\sqrt{1+\xi-\xi^2}+\sqrt{1-\xi+\xi^2}}$$
$$=\lim_{\xi\to0^+}\frac{2\xi-2\xi^2}{\xi(\sqrt{1+\xi-\xi^2}+\sqrt{1-\xi+\xi^2})}=\frac{\lim_{\xi\to0^+}(2-2\xi)}{\lim_{\xi\to0^+}(\sqrt{1+\xi-\xi^2}+\sqrt{1-\xi+\xi^2})}=\frac{2}{2}=1.$$

**مثال ۴۸:** (i) اگر $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ یک چندجمله ای درجه $n$ باشد، $n$ عددی صحیح و نامنفی و $a_n\neq0$، مطلوب است محاسبه $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)$.

(ii) اگر $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ و $g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0$ دو چندجمله ای به ترتیب از درجه های $n$ و $m$ باشند، مطلوب است محاسبه $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$.

**حل:** (i) داریم
$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}x^n(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n})=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n$$
زیرا در پرانتز از جمله دوم به بعد همگی به سمت صفر میل می کنند. بنابراین
$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n$$
و برای $\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n$ دو حالت در نظر می گیریم

**حالت اول:** $a_n>0$. در این صورت
$$\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n=\begin{cases}+\infty\ , & \text{اگر } n \text{ زوج باشد}\\ \pm\infty & \text{اگر } n \text{ فرد باشد و}\end{cases}$$

**حالت دوم:** $a_n<0$. در این صورت
$$\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n=\begin{cases}-\infty\ , & \text{اگر } n \text{ زوج باشد}\\ \pm\infty & \text{اگر } n \text{ فرد باشد و}\end{cases}$$
بنابراین، برای تعیین حد یک چندجمله ای وقتی $x\to\pm\infty$، کافی است حد جمله با بیشترین درجه را وقتی $x\to\pm\infty$ تعیین کنیم.

(ii) داریم

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^n(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n})}{x^m(b^m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m})}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

حالات زیر را در نظر می گیریم.

**حالت اول:** $n>m$ ، داریم $n=m+h$ که در ان $h$ عددی طبیعی است،پس

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n}{b_m}x^h$$

که برحسب علامت $\frac{a_n}{b_m}$، و زوج یا فرد بودن $h$ مقدار آن $+\infty$ یا $-\infty$ خواهد شد (مانند قسمت (i) بحث کنید).

**حالت دوم:** $n=m$ ، پس $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_nx^n}=\frac{a_n}{b_n}$

**حالت سوم:** $n<m$ ، می نویسیم $m=n+h$ که در آن $h$ عددی طبیعی است، پس

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^{n+h}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n}{b_mx^h}=0.$$

## ۲ . ۱۰ عدد $e$

دنباله $\{u_n\}$ را که در آن $u_n=(1+\frac{1}{n})^n, n\in N$ در نظر می گیریم.

**قضیه ۲۴:** دنباله $\{u_n\}$ وقتی $n\to\infty$ دارای حدی بین 2 و 3 است.

**اثبات .** بنا بر فرمول نیوتن داریم

$$u_n=(1+\frac{1}{n})^n=1+\frac{n}{1}.\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1.2}.(\frac{1}{n})^2+\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1.2.\ldots n}.(\frac{1}{n})^n \qquad (۱)$$

با انجام اعمال جبری در (1) بدست می آوریم

$$u_n = (1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\frac{1}{1.2}(1-\frac{1}{n})+\ldots$$

$$+\frac{1}{1.2.\ldots n}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n}) \qquad (۲)$$

از آخرین تساوی نتیجه می شود که دنباله $\{u_n\}$ صعودی است. در حقیقت وقتی $n$ به $n+1$ تبدیل شود، هر جمله در آخرین حاصلجمع افزایش می یابد،

$$\frac{1}{1.2}(1-\frac{1}{n}) < \frac{1}{1.2}(1-\frac{1}{n+1})$$ و الی آخر،

و به علاوه یک جمله هم به حاصلجمع اضافه می گردد( تمامی جملات حاصلجمع مثبت هستند).
بنابراین داریم

$$u_n < u_{n+1}, \forall n \in N$$

اکنون نشان می دهیم که دنباله $\{u_n\}$ کراندار است. با توجه به

$$(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})<1, (1-\frac{1}{n})<1$$ و الی آخر،

از (۲) بدست می آوریم که

$$u_n = (1+\frac{1}{n})^n < 1+1+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2.\ldots n}.$$

و بعلاوه با توجه به

$$\frac{1}{1.2.3}<\frac{1}{2^2}, \frac{1}{1.2.3.4}<\frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{1.2.\ldots.n}<\frac{1}{2^{n-1}}$$

می توانیم نامساوی زیر را بنویسیم:

$$u_n = (1+\frac{1}{n})^n =< 1+[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}].$$

جملات گردآوری شده در طرف راست این نامساوی تشکیل یک تصاعدهندسی با قدر نسبت $q=\frac{1}{2}$ داده و جمله اول $a=1$ ، لذا

$$u_n = (1+\frac{1}{n})^n < 1+[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}]$$

$$=1+\frac{a-aq^n}{1-q} = 1+\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 1+[2-(\frac{1}{2})^{n-1}] < 3.$$

در نتیجه به ازای هر $n$ بدست می آوریم

$$u_n = (1+\frac{1}{n})^n < 3.$$

از (2) نتیجه می شود که همواره

$$u_n = (1+\frac{1}{n})^n \geq 2.$$

بنا براین نامساوی

$$2 \leq u_n \leq 3 \qquad (۳)$$

را داریم. این نشان می دهد که دنباله $\{u_n\}$ کراندار است.

پس دنباله $\{u_n\}$ یک دنباله کراندار و صعودی است و لذا، مطابق آنچه در فصل مربوط به دنباله ها دیده ایم ، دارای حد است. این حد با حرف $e$ نمایش داده می شود.

**تعریف :** حد $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$ وقتی $n \to \infty$ عدد $e$ است:

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

اما بسادگی دیده می شود که $2 \leq e \leq 3$ و بنا بر این قضیه ثابت شده است.

در آنالیز ریاضی ثابت می شود که $e$ عددی اصم است. در ادامه کار، روشی را ارائه می دهیم که می توانیم $e$ را با هر درجه ای از تقریب محاسبه نمائیم. مقدار آن تا 10 رقم اعشار عبارت است از

$$e = 2.7182818284...$$

**قضیه۲۵ :** تابع $(1+\frac{1}{x})^x$ به سمت حد $e$ میل می کند هرگاه $x$ به سمت بینهایت میل کند،

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e. \qquad *$$

**اثبات.** نشان دادیم که $(1+\frac{1}{n})^n \to e$ هرگاه $n \to \infty$، که در آن $n$ مقادیر صحیح و مثبت را اختیار می کند. اکنون فرض کنیم $x$ به سمت بینهایت میل کند، وقتی که $x$ هم مقادیر کسری و هم مقادیر منفی را اختیار نماید.

(۱)فرض کنیم $x \to +\infty$. هر یک از مقادیر آن بین دو عدد صحیح و مثبت قرار دارد،

$$n \leq x < n+1.$$

نامساوی های زیر بر قرار خواهند بود:

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}$$

$$1+\frac{1}{n} \geq 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1}$$

$$(1+\frac{1}{n})^{n+1} > (1+\frac{1}{x})^{x} > (1+\frac{1}{n+1})^{n}$$

اگر $x \to +\infty$ ، بدیهی است که $n \to +\infty$. حال حدود متغیر هائی را پیدا می کنیم که بین آنها متغیر $(1+\frac{1}{x})^{x}$ قرار دارد:

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}(1+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}.\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n}) = e.1 = e$$

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})} = \frac{\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n+1})} = \frac{e}{1} = e$$

لذا ، با استفاده مناسب از قضیه فشردگی ، داریم

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x} = e \qquad (٤)$$

(۲)فرض کنیم $x \to -\infty$. تغییر متغیر $t = -(x+1)$ یا $x = -(t+1)$ می دهیم. وقتی $t \to +\infty$ دیده می شود که $x \to -\infty$ و بالعکس. می توانیم بنویسیم

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{x} = \lim_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t+1})^{-t-1} = \lim_{t\to+\infty}(\frac{t}{t+1})^{-t-1}$$
$$= \lim_{t\to+\infty}(\frac{t+1}{t})^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t})^{t+1}$$
$$= \lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t})^{t}(1+\frac{1}{t}) = e.1 = e$$

بنابراین قضیه ثابت شده است.

اگر در(*) قرار دهیم $\frac{1}{x} = \alpha$ آنگاه $x \to \infty$ معادل است با $\alpha \to 0$ ( ولی $\alpha \neq 0$) و بدست می آوریم

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

## مثال ۴۹: حدود زیر را بدست آورید:

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{7x} \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^{x+3}$$

**حل :** (i)
$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{7x}=\lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x})^{x}]^{7}=[\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}]^{7}=e^{7}$$

(ii)
$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^{x+3}=\lim_{x\to\infty}(\frac{x-1+4}{x-1})^{x+3}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{4}{x-1})^{x+3}$$
$$=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{x-1}{4}})^{(x-1)+4}=\lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{\frac{x-1}{4}})^{\frac{x-1}{4}}]^{4}(1+\frac{1}{\frac{x-1}{4}})^{4}$$
$$=\lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{\frac{x-1}{4}})^{\frac{x-1}{4}}]^{4}.\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{x-1}{4}})^{4}=e^{4}.1=e^{4}.$$

**تبصره :** تابع نمائی $e^x$ نقش بسیار مهمی را در ریاضیات ، مکانیک و سایر رشته های مهندسی ایفا می نماید.

در زیر گراف های توابع $y=e^x$ و $y=(1+\frac{1}{x})^x$ نشان داده شده است.

شکل۲ . ۲۹

**قضیه ۲۶:** فرمولهای زیر برقرار هستند:

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$ ،

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log_e a$ ،

(iii) $\lim_{x\to 1}\frac{x^r-1}{x-1}=r$ .

**اثبات.** برای اثبات (i) ، از این مطلب استفاده می کنیم که تابع $\log_a x$ در نقطه $x=e$ پیوسته است. بنابراین

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x)=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x}$$
$$=\log_a\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\log_a e.$$

برای اثبات (ii) ، می نویسیم

$$y=a^x-1 \quad ، \quad a^x=1+y \quad ، \quad x=\log_a(1+y)$$

و توجه می کنیم که $y\to 0$ هرگاه $x\to 0$. نتیجه می شود که

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\frac{1}{\log_a e}=\log_e a.$$

بالاخره ، برای اثبات (iii) ، توجه می کنیم که

$$\frac{x^r-1}{x-1}=\frac{a^{r\log_a x}-1}{r\log_a x}.\frac{r\log_a x}{x-1}=\frac{a^y-1}{y}.\frac{r\log_a(1+t)}{t}$$

که در آن $y=r\log_a x$ و $t=x-1$ هردو به صفر میل می کنند هرگاه $x\to 1$. لذا با استفاده از (i)و (ii)،

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^r-1}{x-1}=\lim_{y\to 0}\frac{a^y-1}{y}.\lim_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t}$$
$$=r\log_e a.\log_a e=r\log_e e=r.$$

**تبصره:** فرمول (iii) را با قرار دادن $t=x-1$ به شکل زیر می توان نوشت:

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^r-1}{t}=r.$$